Hertentamen Functionaalanalyse, 2007–2008

Datum : 28 januari 2008

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.
Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Definieer de afbeelding $F : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$ door

   $$F(f) := \int_0^1 e^{2t} f(t)dt, \qquad f \in L^2[0,1].$$

   (a) Is F lineair? Rechtvaardig uw antwoord !

   (b) Toon aan dat F een begrensde operator is. Bepaal $\|F\|$.

   (c) Definieer F als hierboven, maar nu als een afbeelding $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$. Toon aan dat ook in dit geval F een begrensde operator is. ($C([0,1])$ is voorzien van de sup-norm.) Bepaal ook in dit geval $\|F\|$.

2. Definieer op de lineaire ruimte van continu differentieerbare functies $C^1([0,1])$

   $$\|f\|_a := \|f\|_\infty + \|\frac{df}{dx}\|_\infty + |f(0)|, \quad f \in C^1([0,1]).$$

   (a) Laat zien dat $\|\cdot\|_a$ een norm op $C^1([0,1])$ definieert.

   (b) Bewijs dat $C^1([0,1])$ met de norm $\|\cdot\|_a$ een Banachruimte is.

   (c) Laat

   $$\|f\|_1 := \max\{\|f\|_\infty, \|\frac{df}{dx}\|_\infty\}, \quad f \in C^1([0,1]).$$

   Bewijs dat de normen $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_a$ equivalent zijn op $C^1[0,1]$.
   (Twee normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ op een lineaire ruimte X zijn equivalent indien er constanten $a > 0$ en $b > 0$ bestaan zodat

   $$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$$

   voor alle $x \in X$.) Is $C^1([0,1])$ met de norm $\|\cdot\|_1$ ook een Banachruimte ?

3. Definieer de functie

   $$\begin{aligned} K(s,t) &= -s(1-t),\ 0 \le s \le t \le 1 \\ K(s,t) &= -t(1-s),\ 0 \le t \le s \le 1. \end{aligned}$$

   Definieer de Fredholm operator $\mathsf{K} : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$

   $$\mathsf{K}u(s) = \int_0^1 K(s,t)u(t)\,dt, \quad u \in L^2(0,1), \quad 0 \le s \le 1.$$

(a) Bewijs dat K een Hermitische operator is.

(b) Neem aan dat μ_n, $n = 1, \cdots$, eigenwaarden zijn van K met eigenvectoren $u_n \in L^2(0,1)$: $\mathsf{K}u_n = \mu_n u_n$. Toon aan dat deze eigenvectoren u_n orthogonaal zijn in $L^2(0,1)$.

(c) Laat $u \in C([0,1])$ en $\mathsf{K}u = f$. Laat zien dat $f \in C^2([0,1])$, en dat f aan de differentiaalvergelijking $-\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = u(t)$, $t \in [0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, voldoet.

(d) Bepaal met behulp van het vorige onderdeel de eigenwaarden en eigenvectoren van K.

(e) Wat is de spectrale radius $r(\mathsf{K})$? Is K een begrensde operator ?

4. Het lijnsegment tussen twee verschillende punten x en y in een genormeerde ruimte E is de verzameling van punten van de vorm

$$\lambda x + (1-\lambda)y, \quad \lambda \in [0,1]$$

(a) Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(i) De eenheidsbol $S = \{\, x \in E : \|x\| = 1 \,\}$ bevat een lijnsegment.

(ii) Er bestaan lineair onafhankelijke elementen $x, y \in E$ met $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

(iii) Er bestaan $x, y \in E$, $x \neq y$, met $\|x\| = \|y\| = 1$ en $\|x+y\| = 2$.

(b) Toon aan dat als E een inproduktruimte is de bovenstaande uitspraken niet waar zijn.
(Aanwijzing: gebruik de parallellogram identiteit.)

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 8, c: 7.
2. a: 10, b: 5, c: 10.
3. a: 5, b: 5, c: 8, d: 6, e: 6.
4. a: 10, b: 5.

Gratis: 10, Totaal: 100